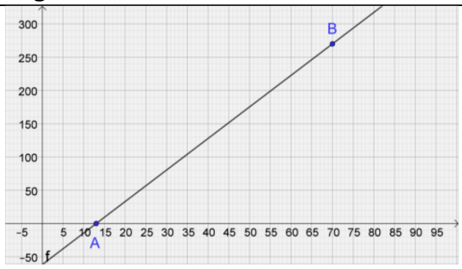
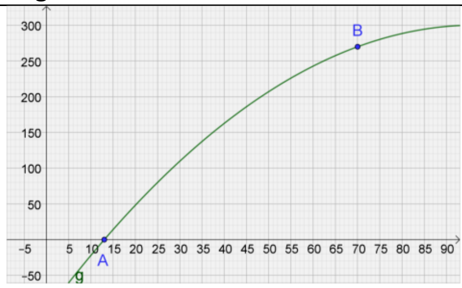
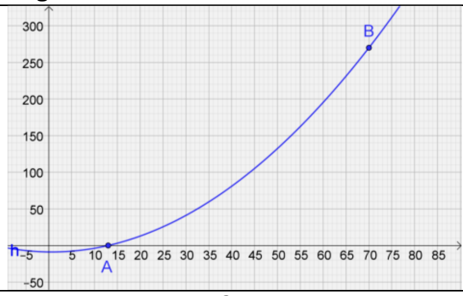
Gespeicherte Energie Bogen

Zieht man die Sehne eines Bogens so ist eine Kraft notwendig.
Folgende Kraft-Weg-Diagramme sind möglich!

Die 3 Diagramme sollen drei verschiedene Bögen veranschaulichen.
$f(x), g(x), h(x)$ in Newton und x in cm

Punkt A=(13, 0)   Punkt B=(70, 270)

Bogen 1	Bogen 2	Bogen 3
		
$f(x) = 4{,}74x - 61{,}58$	$g(x) = -0{,}04x^2 + 8{,}31x - 100{,}79$	$h(x) = 0{,}06x^2 - 0{,}08x - 8{,}8$

Hinweis:

- Im Bogensport gibt man das Zuggewicht eines Bogens in Pfund an. Ein Pfund = 0,4536 kg und 1 kg ≈ 10 Newton.
- Ein 60 Pfund Bogen entspricht daher in etwa 27 kg bzw. 270 Newton.
- Der Auszug wird in Zoll angegeben. Ein Zoll = 2,54cm. Bei 28 Zoll Auszug ergeben sich rund 71 cm!

a.)	Was unterscheidet die drei Bögen hinsichtlich ihrer Auszugskurve bzw. was haben sie gemeinsam?
	Bogen 1 – linearer Anstieg (Zuwachs an Kraft pro Längeneinheit ist konstant) Bogen 2 – quadratischer Anstieg (Zuwachs an Kraft pro LE wird kleiner – rechtsgekrümmt) Bogen 3 – quadratischer Anstieg (Zuwachs an Kraft pro LE wird größer – linksgekrümmt) Alle drei Bögen haben im Punkt B den gleichen Auszug (70cm) und die gleich Kraft (270 N) Alle drei Bögen haben im Punkt A die Standhöhe 13cm (Abstand der Sehne zum Bogen bei 0N)
b.)	Welcher Bogen speichert mehr Energie? Begründe deine Antwort!
	Bogen 2, dann Bogen 1 und als letzter Bogen 3! Begründung: Die Fläche zwischen Graph und x-Achse entspricht der geleisteten Arbeit = gespeicherte Energie welche in der oben angeführten Reihenfolge abnimmt!
c.)	Berechne die gespeicherte Energie (Arbeit) der drei Bögen bei einer Standhöhe von 13cm und einem Auszug von 71cm!
	Bogen 1: $\int_{13}^{71} f(x)dx = 7975\ N * cm$; $E_1 = 79{,}75\ Nm \approx 80\ J$ Bogen 2: $\int_{13}^{71} g(x)dx = 9654\ J$; $E_2 = 96{,}54\ Nm \approx 97\ J$ Bogen 3: $\int_{13}^{71} h(x)dx = 6409\ J$; $E_3 = 64{,}09\ Nm \approx 64\ J$

d.)	Um wie viel Prozent ist Bogen 2 effektiver als Bogen 1?
	$\frac{97}{80} = 1{,}21 \rightarrow \ \ 21\%$
e.)	Physikalisch wandelt sich die gespeicherte Energie nach dem lösen des Pfeiles in kinetische Energie um. Aufgrund des Wirkungsgrades geschieht dies nur zu angenommen 80% (Der Wirkungsgrad hängt von der Herstellung des Bogens ab). Berechne die Kinetische Energie (Bewegungsenergie) eines Pfeiles, wenn dieser 40g wiegt. (Anmerkung: 40g entspricht ca. 617 grain - englische Gewichtseinheit) Es gilt: $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$ (m…Masse in kg, E_{kin} …Kinetische Energie in J, v…Geschwindigkeit in m/s)
	Bogen 1: $v_1 = \sqrt{\frac{2 * E}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 80 * 0{,}8}{0{,}04}} = 56{,}57 m/s \approx 204\ km/h$ Bogen 2: $v_2 = \sqrt{\frac{2 * E}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 97 * 0{,}8}{0{,}04}} = 62{,}28 m/s \approx 224\ km/h$ Bogen 3: $v_3 = \sqrt{\frac{2 * E}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 64 * 0{,}8}{0{,}04}} = 50{,}60 m/s \approx 182\ km/h$
f.)	Für die maximale Flugweite gilt $x_{max} = \frac{v_0^2 * \sin(2\alpha)}{g}$ (mit v_0 …Abwurfgeschw. α …Abwurfwinkel, g…Erdbeschleunigung $g \approx 10 m/s^2$) Begründe, dass für $\alpha = 45°$ die Flugweite am größten ist und berechne die Flugweite eines Pfeiles für $\alpha = 45°$.
	Sin(90°)=1 für alle andere Winkel ist $\sin(2\alpha) < 1$ Bogen 1: $x = \frac{56{,}57^2}{10} = 320\ m$ Bogen 2: $x = \frac{62{,}28^2}{10} = 388\ m$ Bogen 3: $x = \frac{50{,}6^2}{10} = 256\ m$ Hinweis: Die Flugweiten sind nur theoretisch. Auch hier wird ein Teil der Energie anderwärtig umgewandelt (z.B. Eigenrotation der Pfeile, Luftwiderstand, …)